Guía de Ejercicios Compilada: Control Óptimo

Cátedra Battocchio & Cátedra Bianco

Cátedra Battocchio

1. Dado el siguiente problema

$$\max_{u(t)} -\int_0^1 u^2 dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

   a) Hallar las trayectorias óptimas de las variables de control, de estado y de coestado.

   b) Verificar el teorema de suficiencia de Mangasarian.

2. Dado el siguiente problema

$$\max_{u(t)} \int_0^4 3y dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 5 \\ y(4) \text{ libre} \\ u(t) \in [0, 2] \end{cases}$$

   Hallar las trayectorias óptimas de las variables de control, de estado y de coestado.

3. Dado el siguiente problema

$$\max_{u(t)} \int_0^2 (y - u^2) dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} y' = u \\ y(0) = 0 \\ y(2) \text{ libre} \end{cases}$$

   a) Hallar las trayectorias óptimas de las variables de control, de estado y de coestado.

   b) Verificar el teorema de suficiencia de Mangasarian.

4. Dado el siguiente problema

$$\max_{u(t)} \int_0^T -(t^2 + u^2) dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} y' = u \\ y(0) = 4 \\ y(T) = 5 \text{ con } T \text{ libre} \end{cases}$$

   Hallar las trayectorias óptimas de las variables de control, de estado y de coestado.

5. Dado el siguiente problema

$$\max_{u(t)} \int_0^2 (2y - 3u) dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 5 \\ y(2) \text{ libre} \\ 0 \leq u(t) \leq 2 \end{cases}$$

   Se pide hallar las trayectorias óptimas de las variables de control y estado.

6.
$$\max_{c(t)} \int_0^\infty \ln(c(t))e^{-\delta t}dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} \dot{k}(t) = \ln(k(t)) - c(t) - \frac{k(t)}{2} \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

a) Plantear el hamiltoniano a valor corriente, las condiciones del principio del máximo y el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.

b) ¿El sistema de ecuaciones diferenciales es lineal?

c) Realizar el diagrama de fase y marcar las trayectorias óptimas.

7.
$$\max_{c(t)} \int_0^\infty \ln(c(t))e^{-\delta t}dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} \dot{k}(t) = \phi(k(t)) - c(t) - \frac{k(t)}{2} \\ k(0) = k_0 \\ \phi(k(t)) = (1 - e^{-k(t)}) \end{cases}$$

a) Plantear el hamiltoniano a valor corriente, las condiciones del principio del máximo y el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.

b) Realizar el diagrama de fase y marcar las trayectorias óptimas.

8.
$$\max_{I(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t}[\pi(K) - C(I)]dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} \dot{K} = I \\ K(0) = K_0 > 0 \\ \pi(K) = \alpha K - \beta K^2 \\ C(I) = aI + bI^2 \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, a, b > 0$ y $\frac{\alpha}{\rho} > a$.

a) Plantear el hamiltoniano a valor corriente, las condiciones del principio del máximo y el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.

b) ¿El sistema es lineal?

c) Realizar el diagrama de fase y marcar las trayectorias óptimas.

d) Hallar las raíces del sistema y verificar que una es positiva y mayor a ρ, mientras que la otra es negativa.

e) Hallar la solución general del sistema.

f) Hallar las constantes indeterminadas.

9.
$$\max_{c(t)} \int_0^\infty U(c(t))e^{-rt}dt \quad \text{s. a} \quad \begin{cases} \dot{k}(t) = \phi(k(t)) - c(t) - (\delta + n)k(t) \\ k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

con $U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0, \phi'(\cdot) > 0, \phi''(\cdot) < 0$.

a) Plantear el hamiltoniano a valor corriente, las condiciones del principio del máximo y el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.

b) Realizar el diagrama de fase y marcar las trayectorias óptimas.

c) Verificar si se cumple la condición de transversalidad.

10. Considere una economía que debe elegir una trayectoria óptima de consumo teniendo en cuenta que su producción de bienes de consumo requiere la utilización de una fuente de energía contaminante, que llamaremos por simplicidad "petróleo". Sean $S(t)$ el stock de

petróleo en t y $E(t)$ la tasa de extracción de petróleo (y uso de la energía), ambas al momento t. Entonces tenemos que

$$\dot{S} = -E$$

Sea C el nivel de consumo de esta economía y P sus niveles de polución y supóngase que ambas dependen lineal y positivamente del uso de energía, es decir que tenemos

$$C = c_1 + c_2 E \quad \text{y} \quad P = p_1 + p_2 E$$

con c_1, c_2, p_1, p_2 todos positivos. Las preferencias de esta economía vienen representadas por la siguiente función de utilidad instantánea

$$U(C, P) = \alpha \ln(C) - \beta \ln(P)$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $\beta > 1$.

Asumiendo un stock inicial de petróleo S_0 y que los niveles de petróleo nunca pueden ser negativos, obtenga las trayectorias óptimas de uso de energía y stock de petróleo que maximizan la utilidad social acumulada en un período finito de tiempo T.

(*) Considere una economía de un solo sector poblada por trabajadores y capitalistas, en la cual los trabajadores pueden determinar su consumo actual dentro de ciertos límites, y los capitalistas pueden decidir qué parte de la producción que no consumen los trabajadores se destina a inversión o a consumo propio. Tanto los capitalistas como los trabajadores buscan maximizar su consumo intertemporal dentro de un horizonte fijo.

La proporción del producto que consumen los trabajadores es $u_1(t)$, y la proporción del residuo que consumen los capitalistas es $u_2(t)$. $u_1(t) \in [c, b]$ con $0 < c < b < 1$ y $u_2(t) \in [0, 1]$. Si el capital es $k(t)$ y la relación producto-capital es a, entonces las relaciones básicas de la economía en un momento t son:

$$\begin{aligned} \text{Producto: } & ak(t) \\ \text{Consumo de los trabajadores: } & ak(t)u_1(t) \\ \text{Consumo de los capitalistas: } & ak(t)[1 - u_1(t)][1 - u_2(t)] \\ \text{Inversión: } & ak(t)[1 - u_1(t)]u_2(t) \end{aligned}$$

Se pide:

a) Plantear el problema de maximización de los trabajadores.

b) Plantear el problema de maximización de los capitalistas.

c) Hallar $u_1^*(u_2(t), \lambda_1(t))$ y $u_2^*(u_1(t), \lambda_2(t))$.

d) Hallar las trayectorias óptimas de las variables de control, estado y coestado, para un intervalo de tiempo lo suficientemente cerca de T.

e) Hallar el momento $\hat{t}$ en el cual cambian las variables de control.

f) Plantear el problema que enfrentaría un planificador central que busca maximizar el bienestar conjunto de los capitalistas y trabajadores. Repita el procedimiento de los incisos anteriores y compare el $\hat{t}$ resultante con el del inciso anterior.

(Sugerencia: defina $v(t) = (1 - u_1(t))u_2(t))$

Cátedra Bianco

11. Resolver los siguientes problemas de control óptimo en tiempo continuo:

a) $\begin{cases} \text{máx} \quad J = \int_0^2 x - u^2 \, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \\ \text{con} \quad x(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{máx} \quad J = \int_0^4 -\frac{1}{2}(x^2 + u^2) \, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u - x \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{mín} \quad J = \int_0^T (1 + u^2)^{1/2} \, dt \quad T, A \text{ dados} \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \\ \text{con} \quad x(0) = A \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{máx} \quad J = \int_1^2 x + tu - u^2 \, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \\ \text{con} \quad x(0) = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{mín} \quad J = \int_0^1 x - tu + u^2 \, dt + \frac{1}{2}[x(1) - \frac{1}{2}]^2 \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u - x \\ \text{con} \quad x(0) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{máx} \quad J = \int_0^2 ux - \frac{2}{3}u^2 - x^2 \, dt - [x(2) - \frac{7}{3}e^4]^2 \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = x + u \\ \text{con} \quad x(0) = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \text{mín} \quad J = \int_0^2 2x + 3u \, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = -1 + \frac{1}{2}u^2 \\ \text{con} \quad x(0) = \frac{5}{8} \end{cases}$

h) $\begin{cases} \text{máx} \quad J = \int_0^1 -x \, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \\ \quad u \in [-1; 1] \end{cases}$

12. Resolver los siguientes problemas:

a)
$$\begin{cases} \text{mín} \quad J = \displaystyle\int_0^1 u^2\,dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = x + u \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \\ \quad\; x(1) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \text{mín} \quad J = \displaystyle\int_0^2 (9-x)^2 + \frac{1}{8}u^2\,dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u - x \\ \text{con} \quad x(0) = 8 \\ \quad\; x(2) = 9 \end{cases}$$

13. Resolver el siguiente problema donde c es consumo y k es stock de capital

$$\begin{cases} \text{máx} \quad J = \displaystyle\int_0^{10} \ln c\,dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{k} = \dfrac{1}{10}k - c \\ \text{con} \quad k(0) = 10 \\ \quad\; k(10) = 5e \end{cases}$$

14. Resolver el siguiente problema con factor de descuento

$$\begin{cases} \text{mín} \quad J = \displaystyle\int_0^2 e^{-0,5t}\left[(x-1)^2 + \frac{2}{3}u^2\right]\,dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{x} = \dfrac{3}{2}x - u \\ \text{con} \quad x(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

15. Considerar el siguiente problema donde c es consumo y s es stock de capital.

$$\begin{cases} \text{máx} \quad J = \displaystyle\int_0^T e^{-0,05t}\ln c\,dt \quad T, s_0, s_T \text{ dados} \\ \text{sujeto a} \quad \dot{s} = 2s^{1/2} - c \\ \text{con} \quad s(0) = s_0 \\ \quad\; s(T) = s_T \end{cases}$$

a) Plantear las condiciones necesarias de este problema utilizando Hamiltoniano valor presente.

b) Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en s y m que surgen de las condiciones de primer orden, hallar el punto de equilibrio y realizar un estudio analítico del mismo.

c) Realizar un diagrama de fases y comprobar lo hallado en b).

d) Comprobar las condiciones suficientes.

16. Modelo de Eisner - Strotz:

$$\begin{cases} \text{máx} \quad J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\delta t}[\pi(K) - C(I)]\,dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{K} = I \\ \text{con} \quad K(0) = K_0 \end{cases}$$

Donde

$$\pi(K) = \alpha K - \beta K^2 \quad C(I) = aI + bI^2$$
$$\alpha, \beta, a, b > 0 \quad \frac{\alpha}{\delta} > a \quad K_0 > 0 \quad (K_0 \text{ dado})$$

a) Plantear las condiciones necesarias de este problema utilizando Hamiltoniano valor presente.

b) Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en K y m que surgen de las condiciones de primer orden, hallar el punto de equilibrio y realizar un estudio analítico del mismo.

c) Realizar un diagrama de fases y comprobar lo hallado en b).

d) Resolver el problema planteado.

e) Comprobar las condiciones suficientes.

17. Modelo de crecimiento neoclásico (Ramsey):

$$\begin{cases} \text{máx} \quad J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} U(c)\, dt \\ \text{sujeto a} \quad \dot{k} = f(k) - (\lambda + \mu)k - c \\ \text{con} \quad k(0) = k_0 \end{cases}$$

Considerar

$$k_0 > 0 \quad (k_0 \text{ dado}) \quad 0 \leq c \leq f(k)$$
$$U'(c) > 0 \quad U''(c) < 0 \quad f'(k) > 0 \quad f''(k) < 0 \quad k > 0$$
$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty \quad \lim_{c \to +\infty} U'(c) = 0$$
$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty \quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0$$

a) Plantear las condiciones necesarias de este problema utilizando Hamiltoniano valor presente.

b) Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en c y k que surgen de las condiciones de primer orden, hallar el punto de equilibrio y realizar un estudio analítico del mismo.

c) Realizar un diagrama de fases y comprobar lo hallado en b).

d) Comprobar las condiciones suficientes.